FENICHEL Muriel PFAFF Nathalie	***Donner du sens aux mathématiques*** ***Tome 2 - Nombres, opérations et grandeurs***	Bordas Pédagogie 2005
Mots-clés : *apprentissage, situation-problème, mathématiques, concept, constructivisme, socio-constructivisme.*		
Livre emprunté à l'IUFM de Saint Brieuc		

Dans les programmes de l'école élémentaire, on lit que la « *résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées* ». Les situations-pb devraient donc être proposées au démarrage de tout apprentissage.

Avant d'envisager toute construction d'une situation-pb, il est nécessaire de faire un point théorique sur la nouvelle connaissance à enseigner, afin d'identifier les différentes classes de pb qui lui donnent sens ainsi que les différentes procédures possibles permettant de résoudre ces pb (Cf. analyse du champ conceptuel chez VERGNAUD).

A. LA CONSTRUCTION DES CONNAISSANCES.

Dans les documents d'application des programmes de mathématiques (cycles 2 et 3), on peut lire : « *La plupart des notions enseignées à l'école élémentaire peuvent, à l'aide d'activités bien choisies et organisées par l'enseignant, être construites par les élèves comme outils pertinents pour résoudre des problèmes, avant d'être étudiées pour elles-mêmes et réinvesties dans d'autres situations. Les pb proposés doivent alors permettre aux élèves de prendre conscience des limites ou de l'insuffisance des connaissances dont ils disposent déjà et d'en élaborer de nouvelles dont le sens sera progressivement enrichi* ». « *Il faut également prendre en compte le fait que tout apprentissage se réalise dans la durée, dans des activités variées, et que toute activité nouvelle doit être reprise, consolidée et enrichie. […] C'est parfois dans le cadre d'un travail ultérieur, en étudiant d'autres aspects de la notion en jeu ou d'autres concepts, qu'une compétence non maîtrisées à un certain moment pourra être consolidée.* »

1. Le rôle de l'activité de l'élève.

Une nouvelle connaissance ne peut être acquise par un élève qu'à partir du moment où celui-ci constate une insuffisance de ses connaissances actuelles (conception issue des travaux des psychologues constructivistes et socioconstructivistes). Les connaissances nouvelles s'appuient sur des connaissances anciennes, mais elles se forment en rupture avec certaines (PIAGET).

2. La théorie des champs conceptuels.

Pour enseigner l'enseignement d'un concept mathématique, les connaissances des définitions et propriétés relatives à ce concept, bien qu'étant indispensables, ne suffisent pas. En effet, un concept prend des sens différents suivant les types de pb dans lesquels il est impliqué. Le champ conceptuel regroupe l'ensemble des définitions et propriétés relatives au concept et l'ensemble des classes de problème qui font appel au concept mathématique. Ces classes de pb se distinguent par les procédures de résolution auxquelles elles font appel.

L'identification des classes de pb en fonction des différentes procédures possibles permet de repérer les difficultés conceptuelles que rencontrent les élèves, et ainsi d'envisager les erreurs et les obstacles habituellement rencontrés. Une procédure est liée à une propriété mathématique relative au concept mais, à elle seule, elle ne suffira jamais à construire le concept. Un concept est lié à de multiples propriétés mathématiques.

Il est nécessaire que l'enseignant propose aux élèves des pb impliquant diverses procédures. Un concept ne sera acquis qu'à condition que la plupart des procédures possibles aient été abordées.

3. L'apprentissage par situation-problème.

Les définitions de la notion de situation-problème oscillent entre deux pôles : un pôle pédagogique et un pôle didactique. Dans le premier cas, la situation-pb permet d'engager les élèves dans un projet, ce projet provenant de leurs réflexions. Dans le second cas, la situation-pb se centre sur la connaissance à acquérir pour que celle-ci prenne sens pour les élèves.

Selon DOUADY (1984), il y a 7 conditions pour que les pb puissent effectivement servir de déclencheurs à la construction de nouvelles connaissances :

« a) L'énoncé a du sens dans le champ de connaissances de l'élève.

b) L'élève doit pouvoir envisager ce que peut être une réponse au pb.

c) Compte-tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure. Mais la réponse n'est pas évidente. Cela veut dire qu'il ne peut pas fournir de réponse complète sans développer une argumentation le conduisant à des questions auxquelles il ne sait pas répondre immédiatement.

d) Le pb est riche. Cela veut dire que le réseau des connaissances impliquées est assez important, mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité, sinon tout seul, du moins en équipe ou même au sein de la collectivité classe.

e) Le pb est ouvert par la diversité des questions que l'élève peut poser ou par la diversité des stratégies qu'il peut mettre en œuvre et par l'incertitude qui en résulte pour l'élève.

f) Le pb peut se formuler dans au moins deux cadres différents (par exemple, géométrique, numérique, graphique).

g) La connaissance visée par l'apprentissage est le moyen scientifique de répondre efficacement au pb. »

Selon PELTIER (2000), « *Faire des mathématiques, c'est résoudre des pb en développant un raisonnement et pour qu'une activité cognitive puisse avoir lieu, le pb doit vérifier certaines caractéristiques :*

- le pb doit mettre en jeu la connaissance (la notion, la technique) dont l'apprentissage est visé ;

- il doit être « consistant », c-à-d que la réponse ne doit pas être évidente, sinon ce serait simplement un exercice d'entraînement ;

- l'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution avec ses connaissances antérieures, mais il doit aussi avoir à chercher pour les adapter et les faire évoluer ;

- la validation doit être le plus possible à la charge des élèves (on parle d'autoévaluation) ;

- le pb doit pouvoir servir de situation de référence pour la notion et pour la classe. »

Pour CHARNAY (1996), les caractéristiques de la situation-pb recouvrent les 4 premières définies par PELTIER : *« L'élève doit être en mesure de comprendre la situation, de s'approprier le pb et ce qui lui est demandé, sans qu'on est à lui fournir, pour cela, aucune indication sur la manière d'élaborer la réponse. L'élève doit aussi pouvoir essayer les solutions qui correspondent aux conceptions qui sont les siennes, et dont ne pas rester "muet" devant le pb. Il faut également qu'il puisse prendre conscience, seul, par un retour à la situation, du fait que ses premières solutions ne conviennent pas. Il faut donc qu'un démenti expérimental soit apporté à ses conceptions par la situation* ».

Cependant, CHARNAY ajoute une distinction dans la situation-pb selon que la connaissance visée est constructible ou non par les élèves. Dès que les élèves ont pris conscience de leur insuffisance de connaissances, deux possibilités s'offrent à eux :

- La nouvelle connaissance ne peut être découverte par les élèves eux-mêmes, c'est l'enseignant qui l'apporte ; mais cette connaissance doit apparaître aux élèves comme le seul moyen de résoudre la situation par accommodation de leurs connaissances : « *Les élèves disposent de connaissances qui permettent de traiter le pb, mais celles-ci sont peu fiables et peu économiques, ce dont ils vont être amenés à prendre conscience ; mais ils ne peuvent pas par eux-mêmes inventer la connaissance nouvelle, que l'enseignant doit alors apporter.* »
- Les élèves sont capables de découvrir la nouvelle connaissance, en modifiant leurs procédures primitives par accommodation de leurs connaissances antérieures : « *Ils sont dans une impasse dont la situation, telle qu'elle est aménagée, leur permet de prendre conscience ; mais ils peuvent élaborer une nouvelle solution, correcte celle-là, qui fait fonctionner implicitement certains aspects de la connaissance visée.* »

MANTE (1999) rejoint CHARNAY pour décrire une situation-pb.

« Une situation-pb se caractérise par un type de pb qui permet à l'élève de :

- s'engager dans la résolution du pb en investissant ses conceptions anciennes ;

- prendre conscience de l'insuffisance de ses conceptions. Lui seul peut en prendre conscience. Cela suppose que l'élève ait pris en charge la responsabilité de la résolution de pb (dévolution du pb à l'élève) ;

- construire une nouvelle connaissance, qui lui permettre de résoudre le pb.

[…] On peut distinguer deux types de situation-pb :

- les situations-pb qui visent à dépasser un obstacle ;

- Les situations-pb qui visent à donner du sens à un concept, en permettant à l'élève de prendre conscience que les outils qu'il a à sa disposition sont très lourds et sources d'erreurs (sans pour autant être faux). »

DE VECCHI ((1996) différencie situation de départ et situation-pb.

- La situation de départ vise plusieurs objectifs : « *étonner, rendre curieux, motiver, faire émerger les conceptions des élèves et faire naître un questionnement ; préparer la suite du travail en élaborant avec les élèves un projet d'apprentissage* ». *L'enjeu est bien* « *d'impliquer les élèves dans une problématique qui donne du sens aux chois réalisés* ». Cette situation permet donc à l'enseignant d'avoir accès aux conceptions des élèves, à leurs erreurs, afin de choisir les obstacles qu'ils devront dépasser (et définir ainsi des « objectifs-obstacles »).
- La situation qui place l'élève devant l'obstacle sélectionné est nommé situation-pb ou encore « situation de rupture », « situation-impasse », en ce qu'elle fait prendre conscience que son modèle explicatif est inadéquat et qu'il faut le déconstruire. Elle apparait donc comme « *un modèle qui prend naissance à partir d'un manque* » puisque obligeant « *les élèves à mobiliser leurs conceptions erronées, ce qui donnera sens aux obstacles* ». Ainsi, la situation-pb est élaborée par l'enseignant en rapport avec l'obstacle décelé à dépasser. Elle se caractérise par les traits suivants :

« *- avoir du sens ;*

- être liée à un obstacle repéré et dont les apprenants doivent prendre conscience ;

- faire naître un questionnement ;

- créer une ou des ruptures ;

- correspondre à une situation complexe pouvant ouvrir sur différentes réponses et différentes stratégies ;

- déboucher sur une savoir d'ordre général ;

- faire l'objet d'un ou de plusieurs moments de métacognition ».

4. Les différentes phases d'une situation d'apprentissage.

Pour qu'une situation-pb devienne une situation d'apprentissage, plusieurs phases sont nécessaires à sa mise en œuvre dans une classe.

BROUSSEAU décompose la situation d'apprentissage en 4 phases :

« *- la phase d'action, où les élèves prennent conscience de l'insuffisance de leurs connaissances actuelles, puis les élargissent ;*

- la phase de formulation, où les élèves explicitent leurs démarchent de résolution ;

- la phase de validation, où les différentes procédures exposées sont analysées de façon à ne retenir que la procédure attendue ;

- la phase d'institutionnalisation, qui permet aux élèves de se rendre compte de leur acquisition d'une nouvelle connaissance. »

DOUADY distingue 6 phases, dont 2 complètent celles qui sont décrites par BROUSSEAU :

« *- la phase « ancien », où les élèves s'engagent dans le pb avec leurs connaissances actuelles ;*

- la phase recherche, où les élèves s'aperçoivent de l'insuffisance de leurs connaissances et où ils les réorganisent ;

- la phase explicitation, où la connaissance découverte en tant qu'outils à la phase précédente est explicitée ;

- la phase institutionnalisation, où l'enseignant donne le statut d'objet à la nouvelle connaissance ;

- la phase familiarisation ou réinvestissement, où la nouvelle connaissance est réutilisée dans des contextes connus ;

- la phase de complexification, où la nouvelle connaissance est réinvestie dans des contextes plus complexes impliquant d'autres concepts. »

Pour FENICHEL et PFAFF, l'apprentissage d'un concept passe par la confrontation avec une ou plusieurs situation-pb. C'est la résolution de ces situation-pb qui permet de donner du sens au concept.

- La phase de recherche, tout en étant très importante, ne suffit pas aux élèves pour conceptualiser la nouvelle notion. Elle permet d'ancrer toute nouvelle connaissance dans un contexte qui lui donnera du sens et qui facilitera la mémorisation (les élèves se souviennent davantage de ce qu'ils ont fait que de ce qu'ils ont appris).
- Après la phase de recherche, il est nécessaire d'expliciter les difficultés qui ont eu lieu, le(s) moyen(s) utilisé(s) pour les surmonter et les buts atteints. C'est à ce moment-là que les élèves aidés par l'enseignant trouvent les mots et les expressions qui caractérisent ce qu'ils ont appris. C'est ainsi que le langage permet de désigner, d'identifier, de noter les objets mathématiques nouvellement appris et leurs propriétés. Le langage est nécessaire à la conceptualisation.
- L'institutionnalisation peut avoir lieu ensuite. Grâce au vocabulaire qui s'est enraciné dans l'expérience, le cahier de mathématiques s'enrichit de nouvelles connaissances.
- Quelquefois, avant de présenter la situation avec l'obstacle à franchir, une tâche d'appropriation est proposée aux élèves. Cette tâche similaire au niveau du contexte, permet aux élèves de comprendre l'énoncé du problème sans qu'ils soient immédiatement confrontés à l'obstacle, et, ainsi, de s'engager dans le pb. En changeant certaines variables, la situation devient ensuite une situation-pb.
- Après l'institutionnalisation, des exercices sont proposés pour utiliser la notion, mais ceux-ci ne doivent pas être résolus sans réflexion autour de la notion. la modification du contexte ou des variables oblige à se poser des questions sur la validité ou non de la nouvelle connaissance dans

d'autres situations. Ces exercices ont aussi pour but de souligner à quel point il est nécessaire de disposer des propriétés déjà rencontrées pour faire face à des résolutions de pb plus complexes.

5. Le rôle de la manipulation.

La manipulation a un rôle important en mathématiques à l'école élémentaire, mais une activité mathématique ne peut pas se limiter à une manipulation.

Selon les auteurs d'*Apprentissages numériques au CP* (**ERMEl, 2000**), « *le propre de l'activité de mathématique est d'anticiper sur l'action concrète, c-à-d de construire une solution qui va dispenser de la manipulation des objets réels, soit parce que ces objets sont absents dans l'espace et dans le temps, soit parce qu'ils sont trop nombreux, soit parce que leur utilisation amènerait de très nombreuses manipulations coûteuses dans le temps.* »

« *L'activité mathématique s'enracine dans des manipulations réelles antérieures qui peuvent être "évoquées" mentalement ou même verbalement, mais elle se distingue de la manipulation elle-même. En quelque sorte, la solution mathématique, l'action mathématique, s'oppose à la solution pratique, à l'action sur le réel. L'action sur le réel amène le plus souvent à faire un constat, alors que l'action mathématique, même si elle n'utilise pas une solution experte, se situe au niveau de l'anticipation.* »

La manipulation a deux rôles principaux : un rôle de déclencher et un rôle de validation d'une réflexion.

Quand la manipulation sert à déclencher la réflexion, certains concepts apparaîtront grâce à des résolutions de pb nécessitant du matériel.

Si les élèves disposent du matériel pour déterminer la solution du pb, ils n'ont pas besoin de réfléchir avant de manipuler. Leur travail est donc une tâche de constat. En revanche, s'ils doivent proposer une réponse avant de manipuler, une réflexion est nécessaire, le travail est une tâche d'anticipation. Le matériel sert alors à vérifier la validité ou non de leurs propositions.

6. Le rôle de la validation.

La phase de validation est primordiale dans une situation-pb : « *Les informations que l'élève tire de la phase de validation sont très importantes, car c'est à travers elles en particulier que l'élève va pouvoir anticiper de lieux en mieux le résultat de ses stratégies, et donc remanier sa connaissance* » (**MARGOLINAS, 1993**).

MARGOLINAS réserve le terme de validation au cas où la tâche permet à l'élève de décider de lui-même de la validité ou non de sa réponse. Lorsque l'information sur la validité de la réponse incombe à l'enseignant, cette auteure parle d'évaluation.

Pour que l'élève soit incité à modifier ses connaissances, il doit s'apercevoir de lui-même que celles dont il dispose actuellement sont insuffisantes.

B. ENSEIGNER LES NOMBRES.

Une opération ne prend du sens qu'à travers les pb qu'elle permet de résoudre.

Pour tous les types de pb, les procédures de résolution dépendent des nombres en jeu. Les nombres appartenant à un domaine numérique peu important permettent des procédures où l'opération en jeu reste implicite. Les nombres appartenant à un domaine numérique plus grand empêchent le recours à ces procédures et incitent à l'utilisation explicite d'une opération. Dans ce cas, les procédures peuvent s'appuyer sur des écritures symbolisant l'opération et la détermination de la solution nécessite un calcul.

Les programmes définissent par « procédures expertes » les procédures fondées sur la reconnaissance rapide du type de calcul à effectuer et sur la production de l'écriture mathématique correspondante. Les élèves peuvent aussi résoudre des pb sans avoir recours à ces procédures expertes et, dans ce cas, on parle de procédures personnelles.
L'enseignement des procédures expertes s'appuie sur l'utilisation de procédures personnelles par les élèves tout en montrant les limites de celles-ci et la nécessité d'avoir recours à une autre procédure.

Sans être ni obligatoires ni nécessaires, les schémas peuvent constituer une aide efficace à la résolution de pb standards difficiles ou de pb complexes que l'enseignant pourrait difficilement proposer aux élèves à un niveau donné. Le statut et la place des schémas à côté des outils mathématiques doivent être pensés dans une progression d'apprentissage. Il est nécessaire de distinguer les schémas proposés spontanément par les élèves, ceux qui sont initiés par l'enseignant, de ceux qui sont produits dans un travail de classe et qui font l'objet d'une institutionnalisation. Il sera alors nécessaire d'organiser le passage du recours aux schémas personnels des élèves à ceux qui auront été institutionnalisés au sein de la classe.

Les progrès des élèves dans la résolution de pb additifs proviendront non pas de l'enseignement d'une schématisation particulière, mais de la confrontation avec différents types de pb leur permettant de mobiliser diverses procédures pouvant s'appuyer sur plusieurs types de schématisation.

L'enseignant doit donc être capable d'identifier toutes les procédures possibles pour chaque type de pb selon les nombres en jeu. Cela lui permet de proposer à ses élèves une variété de pb différents au niveau des structures tout en leur étant accessibles, c-à-d situés dans leur zone de proche développement.

C. DOMAINES A ENSEIGNER : ANALYSE ET SITUATIONS-PROBLEMES.

Pour chaque domaine, on trouve dans le livre des chapitres consacrés à :
- l'identification de quelques concepts ;
- l'analyse du champ conceptuel (définitions et propriétés, les classes de pb, les procédures de résolution, une synthèse);
- des exemples de situation-pb.

<u>Ici, tableau reprenant la présentation des situations-pb abordés dans l'ouvrage :</u>

Domaine	Niveau	Titre de la situation-pb	Page	Objectifs	Nb de séances
Connaissance des nombres entiers	Cycle II	Le jeu de cartes	68-71	- Découvrir et utiliser les groupements par 10 pour comparer les cardinaux de collection.	3
	Cycle II	Le jeu de piste 1	71-78	- Comprendre la signification de l'écriture chiffrée dans l'écriture d'un nb(< à 100) pour constituer une collection de cardinal donné par son écriture chiffrée.	3

Connaissance des nombres entiers	Cycle II	Le jeu de piste 2	79-82	- Utiliser la signification de la position des chiffres dans l'écriture d'un nb (< à 1 000) pour constituer une collection de cardinal donné par son écriture chiffrée.	3
	Cycle III	Le repérage d'un point	82-86	- Comprendre qu'un point situé sur une demi-droite peut se repérer par un nb : le nb d'unités correspondant à la mesure de la longueur du segment dont les extrémités sont à l'origine de la droite et le point.	2
	Cycle III	L'enveloppe de nombres	86-89	- Découvrir l'échange 10 contre 1 comme moyen pour faciliter le dénombrement d'une grande collection. - Distinguer valeur et quantité.	2
Structures additives	Cycle II	Les deux dés	110-113	- Introduire les écritures additives et soustractives.	2
	Cycle II	Les deux tas de cartes	113-121	- Familiariser les élèves à la résolution de pb de comparaison de mesures et les inciter à produire des procédures personnelles pour les résoudre.	5
	Cycle III	Le jeu de piste 3	122-125	- Familiariser les élèves à la résolution de pb de composition de transformations et les inciter à produire des procédures personnelles pour les résoudre.	3
Structures multiplicatives	Cycle II	La bataille des rectangles	153-163	- Découvrir la multiplication : introduire l'écriture multiplicative, faire fonctionner le signe x de la calculatrice pour effectuer rapidement une addition réitérée. - Mettre en évidence la commutativité de la multiplication.	4
	Cycle III	La distribution de bonbons	163-169	- Découvrir la division en tant qu'opération réciproque de la multiplication. - Introduire le signe ÷. - Utiliser la calculatrice pour trouver le quotient dans une division ou pour déterminer les diviseurs d'un nb. - Aborder la notion de multiple et celle de diviseur d'un nb.	3
	Cycle III	La hauteur de la tour	169-174	- Découvrir une situation de proportionnalité en utilisant la propriété additive ou multiplicative de la fonction linéaire.	3
	Cycle III	Le nombre de pieds	174-177	- Pour une situation de proportionnalité liant deux grandeurs de même nature, utiliser une procédure fondée sur la propriété multiplicative de la fonction linéaire.	1
	Cycle III	La masse des billes	177-180	- Pour une situation de proportionnalité, repérer plusieurs procédures dont celle qui s'appuie sur le passage à l'unité.	1
Grandeurs et Mesures	Cycle II	Le rangement du plus lourd au plus léger	214-215	- Différencier la masse du volume.	1

Grandeurs et Mesures	Cycle II	Le sablier	215-218	- Construire le concept de durée en tant que grandeur (sans le recours à la mesure).	2
	Cycle III	Les deux règles	218-221	- Découvrir la relation qui lie le cm et le mm.	1
	Cycle III	Périmètre et aire	221-225	- Découvrir le concept d'aire en la distinguant du périmètre.	3
Connaissance des fractions et des nombres décimaux	Cycle III	Les gâteaux	259-271	- Découvrir les fractions simples de l'unité (demi et quart) dans une situation de partage. - Introduire les écritures fractionnaires correspondantes. - Réinvestir l'untilisation des fractions simples de l'unité pour désigner une quantité ou réaliser une collection dans un contexte différent. - Découvrir ou réinvestir l'équivalence de quelques fractions usuelles. - Réinvestir les écritures fractionnaires de dénominateur 10 sur un contexte différent de celui des gâteaux. - Découvrir l'équivalence entre $\frac{5}{10}$ et $\frac{1}{2}$.	5
	Cycle III	Le repérage d'un point	272-276	- Passer de la connaissance du repérage des points sur une ligne graduée avec des nombres entiers à celle du repérage avec des nb décimaux.	2
Le calcul	Cycle II	L'addition	288-289	- Approcher le calcul posé de l'addition.	1
	Cycle III	La soustraction	290-291	- Approcher le calcul posé de la soustraction.	1
	Cycle III	La multiplication	291-292	- Approcher le calcul posé de la multiplication.	1